

УДК 781.1

МЕТОД ПОБУДОВИ ШКАЛ ГАРМОНІЧНОГО МУЗИЧНОГО СТРОЮ

Анатолій Іваницький, Тетяна Іваницька

У статті викладено розроблений авторами метод побудови шкал гармонічного музичного строю з комами різної величини. У результаті дії цього методу побудовано 12-щаблеві натуральні гармонічні шкали, у яких вирішено проблему відчутних ком та встановлено відповідну будову шкал.

Ключові слова: рівномірно-темперований стрій, гармонічний музичний стрій, кома, показник рівня гармонічності.

The method of the harmonical musical scales (with commas of the different size) is described in this article. As a result of this method applying 12-graded the natural harmonious scales were built, the problem of palpable commas was resolved and the structure of scales was established.

Keywords: an equal temperament tuning system, a harmonic musical tuning system, a comma, an indicator of the level of harmonicity.

В історичному розвитку музичної теорії і практики завжди існувала проблема побудови музичного строю [1], який є системою звуковисотних співвідношень [2]. Найпоширеніший – 12-щаблевий, який становить замкнуте квінтове коло [3]. Відомо, що в Древній Греції Аристоксен (~354–300 до Р.Х.) «ідентифікував звуки 12-ї верхньої та нижньої квінти з вихідним звуком і, таким чином, ділив октаву на 12 рівних частин, передбачаючи сучасну рівномірну температурацію» [4, с. 175] М. Мерсена (1588–1648) та А. Веркмейстера (1645–1706) [5]. Взагалі, 12-щаблеві музичні строї активно поширювалися й використовувалися з XVI ст., що є безперечним доказом їхньої практичної спроможності та доцільності [5; 6; 7; 8]. Із цієї множинності можна виділити гармонічні музичні строї [1], які є системою звуків обертонового ряду, частоти яких кратні основній частоті f_1 (першій гармоніці) і розташовані по квінтах [9]. У книзі Д. Бенсона [1] є музична шкала композитора В. Карлос (1939), що її Д. Бенсон назвав гармонічною.

В усіх 12-щаблевих музичних строях, окрім строїв І. Нейдгардта (бл. 1685–1739) та рівномірно-темперованого [1; 3; 4; 5; 6], існувала невирішена проблема будови шкал із наявністю відчутних ком [4]. У попередньо депонованому рукопису авторів [9] цю проблему було вирішено і розроблено метод побудови шкал гармонічного музичного строю з комами різної величини¹. Однак у музикознавчій літературі до сьогодні лишається невідомим метод отримання шкал гармонічного музичного

строю, в котрих можливо регулювати кому за рахунок зменшення величини f_1 . Тому мета цієї статті – надати метод побудови шкал гармонічного музичного строю з комами різної величини. Завдання: 1) здійснити аналіз деяких гармонічних шкал XIX–XX ст. з огляду на їхню квінтову та комову будову; 2) побудувати 12-щаблеву шкалу з вирішеною проблемою відчутних ком. Для стислості шкали гармонічних музичних строїв будемо називати гармонічними шкалами.

Сутність методу

Розглянемо гармонічний звукоряд (шкалу) від звука C_1 (до контроктави), до звука c^5 (до п'ятої октави) у межах основного практичного використання натуральними інструментами [10]². У цій статті всі конкретні значення звуків гармонічних музичних шкал, які будуть розглядатися, відповідають звуку c^1 , який дорівнює 256 Гц. Тоді частота звука C_1 дорівнює 32 Гц, а c^5 – 4096 Гц. Якщо звучить, наприклад, псалмодія на одному звуці, то його частота дорівнює основній частоті f_1 . Якщо звучить псалмодія двоголосно або двозвучна мелодія, які складаються з фіксованих двох звуків (тобто два звуки по вертикалі або по горизонталі), то в обох випадках основна частота f_1 або дорівнює частоті основного тону нижнього звука інтервалу, або розташована нижче. Якщо звучить мелодія, яка складається з трьох і більшої кількості звуків, або вона звучить в інтервальному викладенні, то її f_1 буде спільною максимальною кратною частотою основних тонів

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

цих звуків. Таким чином, частота f_1 є показником рівня гармонічності [9]. Величина f_1 залежить від діапазону теми та її частотно-го розташування. Чим менший номер гармоніки частоти нижчого звука мелодії, тим вищий її рівень гармонічності.

Усі частоти звуків гармонічної музичної шкали мають бути кратними частоті f_1 . Номер гармоніки n можна визначити за формулою (1):

$$f_k / f_1 = n, \quad (\text{формула 1})$$

де f_k – частота k -го звука, а n – ціле число.

Показником рівня гармонічності певної октави називається максимально кратна за величиною частота f_1 звуків цієї октави [9]. Це означає, що всі частоти цієї октави діляться на цей показник рівня гармонічності (формула 1).

Показником рівня гармонічності певної шкали гармонічного музичного строю називається максимально кратна частота f_1 звуків, з яких складається шкала [9]. Наприклад, якщо музичний твір написано в діапазоні від звука c до звука c^2 , то при використанні інструмента з настройкою на частоти цього музичного строю визначальним буде рівень гармонічності малої октави, а якщо в діапазоні, який охоплює частоти від другої октави до п'ятої, то визначальним буде рівень другої октави.

Отже, представимо гармонічну музичну шкалу від C_1 до c^5 , побудовану так, щоб кожен її звук був за частотою якомога ближче до однойменного звука рівномірно-темперованої шкали (див. таблицю № 1, де світло-сірим кольором відмічена графа (колонка), де по октавах розташована рівномірно-темперована шкала, а поруч – гармонічна музична шкала авторів). Для підрахунків використано калькулятор із тридцятидвозначними цифрами, що їх записано скороченими. У розглянутих шкалах дієз за частотою дорівнює бемоллю і є енгармонічно рівним. Для позначення підвищення звука на півтон у таблиці обираємо знак дієзу та, виключно для всіх октав, позначення нот великими літерами: C (до), D (ре), E (мі), F (фа), G (соль), A (ля), H (сі) [11]. У графах таблиці наведено: назву октави, рівень

гармонічності по октавах $f_1 = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128)$ Гц, частоту звука гармонічної музичної шкали в Гц та номер гармоніки.

Кожний звук гармонічної шкали в усьому діапазоні частот має свій єдиний номер гармоніки, і при діленні частоти звука f_k на нього отримаємо частоту f_1 цієї октави:

$$f_k / n = f_1, \quad (\text{формула 2})$$

а для того, щоб знайти частоту кожного звука f_k , перемножимо між собою номери гармонік n та f_1 :

$$f_k = f_1 \cdot n. \quad (\text{формула 3})$$

Із таблиці видно, що номер гармоніки кожного однойменного звука в різних октавах незмінний.

Базуючись на визначенні показника рівня гармонічності шкали гармонічного музичного строю для нашого музичного звукоряду, побудованого від контроктави до п'ятої октави, визначаємо, що його рівень гармонічності дорівнює 2 Гц.

Позаяк у квінтовому строї саме чиста квінта є найголовнішим структуроутворювальним інтервалом, саме аналіз квінт і ком став основним інструментом математичного дослідження інтервальної і комової структури цього строю. Назвемо такий аналіз *квінтово-комовим*. Для того, щоб його здійснити, спочатку треба виміряти всі 12 квінт музичного строю шляхом визначення математичної різниці між частотами верхнього та нижнього звуків, через ділення значення частоти верхнього звука інтервалу квінти (в Гц) на значення частоти нижнього. Наприклад, з таблиці № 1 видно, що звук G становить 384 Гц в першій октаві, а звук C – 256 Гц, тоді інтервал квінти $C - G$ буде дорівнювати 1,5, тобто $384 : 256 = 1,5$. Звук D становить 576 Гц у другій октаві, тоді квінтове співвідношення $G - D$ буде дорівнювати 1,5, тобто $576 : 384 = 1,5$.

Пригадаємо, що при перемноженні величин 12-ти чистих квінт 4^5 між собою, немає збіжності ряду [3]:

$$(3/2)^{12} \neq (2/1)^7; 129,74634 \neq 128. \quad (\text{формула 4})$$

АНАТОЛІЙ ІВАНИЦЬКИЙ, ТЕТЯНА ІВАНИЦЬКА. МЕТОД ПОБУДОВИ ШКАЛ...

Співвідношення чисел 129,74634 та 128 дає так звану *піфагорову кому*. Г. Ріман підрахував її, як $3^{12}/2^{19} = 1,0136432647705078125$ [3]. За визначенням ученого, комою «називають різницю між математичними величинами двох тонів, приблизно рівних за висотою» [12, с. 654]. Математики й музиканти здавна прагнули вирішити проблему розбіжності ряду, як і проблему зменшення коми. Якщо *піфагорову кому* поділити на 12 рівних частин, отримаємо кому, яка називається *рівномірно-темперованою*, тобто такою, що належить рівномірно-темперованому (енгармонічному) ряду і позначається c_p [9]:

$$3^{12:12}/2^{19:12} = 3/2^{19/12} = 1,0011298906275257736231239108885. \quad (\text{формула 5})^3$$

Саме це співвідношення складає також математичну різницю між інтервалами: чистою квінтою $c_5 = 3/2$ та *рівномірно-темперованою квінтою*. Для цього поділимо $3/2$ на рівномірно-темперовану кому 1,00113 і отримаємо значення рівномірно-темперованої квінти:

$$1,5 : 1,0011298906275257736231239108885 = 1,4983070768766814987992807320303 \approx 1,49831. \quad (\text{формула 6})$$

У системі рівної температурації є інший запис величини будь-якого інтервалу [4]:

$$2^{n/12}, n = \overline{0,12}. \quad (\text{формула 7})$$

Для порівняння квінтових співвідношень нашого строю з аналогічними співвідношеннями рівномірно-темперованого потрібно знати *диференціальний поріг відчуття різниці між двома сусідніми частотами*. Він становить 0,2 – 0,3 % [13; 14; 15; 16] та позначається літерою d [9]. У своїх підрахунках будемо користуватися числом 0,3 % і це відповідає співвідношенню 1,003. Якщо порівняти чисту квінту 1,5 та рівномірно-темперовану 1,49831, стає очевидно, що вони відрізняються одна від одної на величину такої коми 1,00113, яка пере-

буває за межами сприйняття людським вухом і складає приблизно 0,1 %. Отже, між величинами обох квінт існує несуттєва різниця. Умовна позначка інтервалу квінти як певної суми 3,5 тонів – це c_5 . Рівномірно-темперована квінта позначається як p_5 [9]. Доповнимо визначення Г. Рімана стосовно коми [12, с. 654]. *Комою назвемо математичну різницю між величинами двох тонів, приблизно рівних за висотою, та двох інтервалів, приблизно рівних за величиною*.

Використання рівномірно-темперованої квінти вирішило два питання: збіжності ряду [так як $(2^{7/12})^{12} = (2^{12/12})^7$] і відчутної коми, але при цьому виникла проблема браку натуральності строю. Якщо рівномірно-темперований стрій справедливо критикували за ненатуральність інтервалів, які входили до його складу [5, с. 63], то в натуральних строях такої проблеми не існує, тому що складові інтервалів – це звуки обертонового ряду. Тому після усвідомлення переваги чіткої будови рівномірно-темперованого строю продовжилися подальші пошуки такого натурального строю, який би задовольнив потреби як збіжності ряду, так і зменшення коми.

Отже, представимо аналіз усіх квінт і ком нашої гармонічної шкали задля визначення її характерних особливостей [9]. Для цього запишемо в таблиці № 2 співвідношення всіх натуральних квінт нашої гармонічної шкали з рівномірно-темперованою квінтою, де в результаті щораз отримуємо кому через ділення більшого значення інтервалу на менше. Наприклад, якщо гармонічний інтервал $C - G$ дорівнює 1,5, то кома становить 1,00113:

$$1,5 : 1,49831 = 1,00113.$$

Інтервал $A - E$ дорівнює 1,48148, тоді кома становить 1,01136:

$$1,49831 : 1,48148 = 1,01136.$$

У таблиці № 2 і надалі коми підраховано шляхом співвідношення натуральних інтервалів гармонічних шкал з аналогічними інтервалами рівномірно-темперованої шкали. Наприклад, якщо гармонічний ін-

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

тервал С – G дорівнює 1,5, то кома становить 1,00113:

$$1,5 : 1,49831 = 1,00113.$$

Інтервал А – E дорівнює 1,48148, тоді кома становить 1,01136:

$$1,49831 : 1,48148 = 1,01136.$$

Інтервальні коефіцієнти [13] позначаються літерою k , а коми – літерою c [9]. Їхні величини однакові в усіх октавах. Наведемо тільки дані інтервальних коефіцієнтів і ком квінт нашої гармонічної шкали. У цій таблиці і надалі позначимо комове співвідношення в межах відчуття темно-сірим кольором.

Інтервальні зони, про які висловив думку ще Г. Ріман як про «ширину для локалізації звукової висоти в нашому слуховому відчутті» [5, с. 106; 3, с. 100], які були зафіксовані О. Мальцевою в 1936 році та підтверджені М. Гарбузовим у 1945 році [17; 18], дотепер суттєво не змінилися. Для визначення сучасних меж інтервалу квінти треба величину рівномірно-темперованої квінти $p5$ помножити й поділити на сучасний диференціальний поріг відчутності між сусідніми тонами:

$$p5 \cdot d \text{ та } p5 : d, \text{ тобто } 2^{7/12} \cdot 1,003 \text{ та } 2^{7/12} : 1,003, \quad (\text{формула } 8)$$

де d – диференціальний поріг. Якщо $1,49831 \cdot 1,003 = 1,50280$ є верхньою межею інтервалу, то $1,49831 : 1,003 = 1,49383$ – нижньою [9]. Зі зміною диференціального порога відчуття d ці показники треба перерахувати. Усі квінти, які входять до цієї зони за своєю величиною, вважаються *практично чистими*, а ті, які входять до складу натуральних шкал (у тому числі гармонічних) – *натуральними* і позначаються літерою з індексом $n5$ [9].

Побудована гармонічна шкала (див. таблицю № 1) має п'ять чистих квінт і сім інтервалів, які виходять за межі квінти. Для визначення середньоарифметичної величини інтервалу k_{cp} квінти треба суму 12-ти інтервалів k_i поділити на 12:

$$k_{cp} = \sum_{i=1}^{12} k_i / 12, \quad (\text{формула } 9)$$

$$1,5 \cdot 5 + 1,4815 + 1,5333 + 1,4783 + 1,4706 + 1,52 + 1,4737 + 1,5238 = 17,98116; \\ k_{cp} = 17,98116 : 12 = 1,49843 [9].$$

Для визначення середньоарифметичної величини коми c_{cp} треба застосувати той самий принцип:

$$c_{cp} = \sum_{i=1}^{12} c_i / 12 \quad (\text{формула } 10)$$

$$1,0011 \cdot 5 + 1,0114 + 1,0234 + 1,0136 + 1,0188 + 1,0145 + 1,0167 + 1,0170 = 12,12100; \\ c_{cp} = 12,12100 : 12 = 1,01008 [7].$$

Аналіз квінт і ком дозволив якнайкраще підібрати частоту звука $A\sharp$ для контроктави. Кожен звук нашої гармонічної шкали в контроктаві кратний 2 Гц, а її частоти є парними числами, наближеними до рівномірно-темперованих. Враховуючи частоту звука $A\sharp$ 57,017 Гц рівномірно-темперованої шкали, звук $A\sharp$, що дорівнює 56 Гц, є певним виключенням (див. таблицю № 1), тому що частота 58 Гц трохи ближче розташована. Але з погляду на прилеглі до цього звука квінти, маємо кращі показники з частотою 56 Гц, ніж із другою, а саме: квінта $\bar{D}\sharp - \bar{A}\sharp$, що дорівнює 1,47368 з комою 1,01671, краща, від аналогічної, що дорівнює 1,52632 з комою 1,01869, наступна квінта $\bar{A}\sharp - \bar{E}\sharp$, що дорівнює 1,5 з комою 1,00113, краща від аналогічної яка дорівнює 1,44828 з комою 1,03545. Таким чином, доходимо висновку, що *першорядний принцип побудови гармонічного музичного строю – наближення його до рівномірно-темперованого – супроводжується такою умовою як квінтово-комовий аналіз* [9].

Використовуючи проведений аналіз квінтового кола нашої гармонічної шкали, представимо характеристику шкал прототипних з огляду встановленого рівня гармонічності, А. Елліса (1814–1890), В. Карлос (1939), Дж. Кпонариса (1956). Це шкали,

опубліковані Д. Бенсоном [1, 19]. У графах таблиці № 3 наведено такі параметри: частота звука першої октави, номер гармоніки, назва звука вказаних гармонічних і рівномірно-темперованої шкал.

Упевнюємося, що існують висотні розходження деяких звуків у порівнюваних гармонічних шкалах. Далі продемонструємо їх, враховуючи їхню квінтово-комову будову (див. таблицю № 4) [9]. У таблицях № 1, 3, 5, 6, 8 представлено дані рівномірно-темперованої шкали для порівняння з нею.

У гармонічній шкалі А. Елліса бачимо одну чисту квінту та одинадцять інтервалів, які виходять за межі квінти (показано темно-сірим кольором); у гармонічній шкалі Дж. Клонариса – чотири чистих квінти та вісім інтервалів, які виходять за межі квінти; у гармонічній шкалі В. Карлос та в нашій – п'ять чистих квінт і сім інтервалів, які виходять за межі квінти, хоча числові показники у двох останніх збігаються не всі [9].

Представимо середньоарифметичні значення квінт у згаданих авторів. Занесемо результати середньоарифметичних значень натуральних квінт $n5$ і ком c_{cp} усіх чотирьох шкал до таблиці та порівняємо з рівномірно-темперованими [9].

Середньоарифметичне значення квінти гармонічної шкали А. Елліса відрізняється від рівномірно-темперованої 1,49831 у другій цифрі після коми (поганий показник), а трьох інших гармонічних шкал – у четвертій цифрі (гарний показник) [9]. Якщо подивитися на співвідношення рівномірно-темперованої квінти з квінтами цих шкал, побачимо, що тільки квінти шкали А. Елліса розміщені в межах відчуття різниці між ними на слух, а в усіх інших – поза межами відчуття.

Середньоарифметичне значення ком c_{cp} усіх чотирьох шкал відрізняється від рівномірно-темперованої c_p (1,00113) у другій цифрі після коми. Величина c_{cp} визначається рівнем гармонічності f_1 та будовою певної гармонічної шкали, тобто ступенем наближення чи віддалення від рівномірно-темперованої. Якщо подивитися на співвідношення рівномірно-темперованої коми c_p з іншими, то побачимо, що вони перебувають в межах відчуття різниці між ними. Це погані показники, тому що коми дуже

великі. Крім того, при непоганих середньоарифметичних квінтових величинах, погані середньоарифметичні величини ком унаочнюють проблеми будови всього строю.

Щодо отриманих нами результатів: оскільки нашу гармонічну шкалу побудовано за принципом наближення її частот до співвідносних з ними в рівномірно-темперованій шкалі, вона має найкращі показники з усіх чотирьох шкал. Оскільки цей принцип підтверджується результатами дослідження, будемо користуватися ним надалі.

Бачимо, що значний рівень гармонічності f_1 створює проблему коми, незважаючи на використання в побудові гармонічної шкали правильного принципу наближення до рівномірно-темперованої шкали, у якій немає проблеми відчутних ком. Тому перед нами стоїть таке завдання: *показати, як змінюється величина й кількість ком при поступовому зменшенні величини f_1 на прикладі нашого попереднього ряду.*

Пригадаємо, що показник рівня гармонічності f_1 – величина, яка змінюється з частотою в прямопропорційній залежності: чим більша частота, тим більше f_1 і навпаки. У діапазоні частот від 32 до 4096 Гц f_1 нашого ряду змінюється від 2 до 128 Гц (див. таблицю № 1). Рівень гармонічності f_1 між сусідніми октавами завжди розрізняється вдвічі (... , 0,25 Гц; 0,5 Гц; 1 Гц; 2 Гц; ...; 128 Гц...). *Отже, у цьому випадку будемо вважати мінімальним кроком зміни рівня гармонічності його октавний зсув.* У зв'язку з цим можна зменшувати рівень гармонічності музичного строю, намагаючись отримати гармонічні ряди з величиною коми за межами відчуття [9].

Якщо величина f_1 прямопропорційно залежить від частоти, то від номера гармоніки n , – оберненопропорційно: чим більше f_1 , тим менше n і навпаки.

Розроблений нами метод побудови шкал гармонічного музичного строю з квінтами та комами різної величини полягає у трьох діях:

1а) у зменшенні вдвічі рівня гармонічності всієї гармонічної музичної шкали, тобто в зменшенні вдвічі f_1 нижньої октави $f_1 : 2$, та в збільшенні вдвічі номера гармоніки n кожного звука, якщо потрібно, з

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

додаванням чи відніманням m , де m – складова номера гармоніки, яка є цілим числом від 1 до необхідного числа задля виконання першорядного принципу наближення до рівномірно-темперованої шкали $(n \cdot 2) \pm m$; або

1б) у збільшенні вдвічі рівня гармонічності всієї гармонічної музичної шкали, тобто в збільшенні вдвічі f_1 нижньої октави $\bar{f}_1 \cdot 2$, та в зменшенні вдвічі номера гармоніки n кожного звука, якщо потрібно, з попереднім додаванням чи відніманням m , де m – складова номера гармоніки, яка є цілим числом від 1 до необхідного числа задля виконання першорядного принципу наближення до рівномірно-темперованої шкали $(n \pm m) : 2$, а $n \pm m$ – парне число;

2) у підрахуванні частоти кожного звука нової гармонічної музичної шкали і побудові її знизу вгору в межах необхідного діапазону за двома модифікаціями формули (3):

$$f_k = (f_1 : 2) \cdot ((n \cdot 2) \pm m), \text{ або (формула 11)}$$

$$f_k = (f_1 \cdot 2) \cdot ((n \pm m) : 2). \quad \text{(формула 12)}$$

3) у виконанні умови, що нею супроводжується першорядний принцип, – квінтово-комового аналізу отриманої гармонічної музичної шкали.

Якщо в результаті такого аналізу коми виходять за припустимі межі слухового відчуття, якому відповідає цифровий показник 1,003, то здійснюємо ще раз означені три дії. Так повторюємо, доки не отримаємо максимально припустимі значення ком. У результаті цих дій також отримуємо гармонічні шкали з показниками рівня гармонічності f_1 , які називаються *взаємопов'язаними*, найменший з яких буде кратною частотою для \bar{f}_1 усієї групи цих шкал [9].

Побудова гармонічного музичного строю за допомогою розробленого методу. Обираємо визначену послідовність 1а – 2 – 3. Отже, стосовно нашого музичного ряду з $\bar{f}_1 = 2$ Гц застосуємо означений метод, використовуючи формулу (11), за якою знайдемо \bar{f}_1 нової гармонічної шкали:

$$f_1 : 2 = 2 : 2 = 1 \text{ Гц,}$$

а потім визначимо нові номери гармонік n кожного звука $(n \cdot 2) \pm m$ (див. таблицю № 6; 5–6 колонки ліворуч). Для цього помножимо номери попередніх гармонік (див. таблицю № 6, 4 графа ліворуч) усіх звуків на 2 і поміняємо цей результат, додаючи $\pm m$, де $m = 1$. Після цього знайдемо частоти всіх звуків f_k (див. таблицю № 6; 3 графа праворуч за формулою (3)). У результаті отримуємо другу гармонічну шкалу з рівнем гармонічності f_1 , взаємопов'язаним із f_1 попередньої шкали [9].

Так побудована наша гармонічна шкала в контроктаві. Співвідношення кожного звука нової шкали з однойменним звуком рівномірно-темперованої шкали має кращі показники (див. таблицю № 6; 1, 2 графа праворуч), тобто саме це й означає зменшення величин і кількості ком [9].

Порівняно з першою шкалою (таблиця № 1; таблиця № 3, правий боковик), змінено чотири звуки: F , $F\sharp$, $G\sharp$, $A\sharp$ і отримано нову гармонічну шкалу з удвічі меншим рівнем гармонічності і меншою кількістю відчутних ком [9]. Продемонструємо порівняльний квінтово-комовий аналіз наших двох шкал (див. таблицю № 7) [9].

Бачимо, що не тільки кількість, але й величини ком було зменшено. Це ще раз підтверджує правильність методу побудови гармонічних музичних шкал, як і дії принципу наближення їхніх частот до рівномірно-темперованої шкали. У зв'язку з тим, що все-таки в отриманій шкалі лишається п'ять ком у межах слухового відчуття, продовжимо застосування нашого методу і зробимо ще декілька кроків за формулою (11), у результаті яких отримаємо шкалу без єдиної відчутної коми. Отримані шкали та їх порівняльний квінтово-комовий аналіз міститься в роботі [9].

У результаті цього аналізу впевнюємося, що дійсно отримали шкалу без єдиної відчутної коми. Наші завдання вирішено: *завдяки застосуванню вищеподаного методу (у послідовності 1а, 2, 3), отримано натуральну гармонічну музичну шкалу, в якій повністю відсутня проблема відчутних ком* [9]. Усі наші гармонічні шкали мають взаємопов'язані між собою рівні гармонічності f_1 , причому найменший рівень f_1

знайденої (п'ятої) шкали без відчутних ком за своєю величиною є спільним кратним для перших чотирьох шкал, більших за показником \bar{f}_1 в 2^n разів:

$$f_{1 \text{ вихідної шкали}} \cdot 2^n = f_{1 \text{ оптимальної шкали}}, \text{ тобто } 2 \cdot 2^4 = 0,125 \text{ Гц.} \quad (\text{формула 13})$$

Продемонструємо знайдену гармонічну шкалу, побудовану в діапазоні частот від контроктави до п'ятої (див. таблицю № 8) [9]. У колонках 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15 сірого кольору наводимо показник частоти звука рівномірно-темперованої шкали в Гц, а в колонках 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 – показник частоти гармонічної шкали в Гц і номер гармоніки.

Задля спільного висновку квінтово-комові дані щодо всіх наших гармонічних шкал зведемо в таблиці № 9 [9].

Об'єднуюча таблиця показує прогресивне зменшення кількості і величин ком у зв'язку зі зменшенням f_1 гармонічної музичної шкали. З музичного ряду при \bar{f}_1 , що дорівнює 0,125 Гц в контроктаві (останні рядки таблиці № 9), відчутні коми зникають. *Таким чином, встановлено найвищий рівень гармонічності f_1 для натуральних гармонічних шкал, у яких відсутня проблема коми. У контроктаві він становить величину 0,125 Гц, а в першій – 1 Гц. Виходячи саме з цього рівня гармонічності, у гармонічних музичних шкалах вирішено проблему наявності відчутних ком* [9].

У результаті аналізу доходимо висновку, що всі без винятку гармонічні шкали XIX–XX ст. мали проблеми звуковисотної будови, що виражено в наявності ком, відчутних слухом. У цій статті надано метод побудови шкал гармонічного музичного строю з комами різної величини. Розроблений та обґрунтований метод дозволяє *отримати* гармонічні музичні шкали із взаємопов'язаними рівнями гармонічності f_1 . У результаті дії цього методу побудовано 12-щаблеві натуральні гармонічні шкали, у яких вирішено проблему наявності відчутних ком та встановлено відповідну будову. Викладено *першорядний принцип* побудови гармонічного музичного строю, який полягає в наближенні його до рівно-

мірно-темперованого. Результативність цього принципу забезпечено необхідними умовами – квінтово-комовим аналізом та знаходженням максимально можливого рівня гармонічності f_1 .

¹ Пріоритет зафіксовано 16.04.2007. Авторське свідоцтво № 21058 від 03.07.2007.

² Субконтроктава повністю є в органа, декілька звуків у контрафагота, фортепіано та арфи.

³ За величиною рівномірно-темперована кома практично збігається зі схизмою 32805/32768 = 1,001129150390625 [11].

⁴ Автор роботи Євона Т. А. перейшла на своє ділове прізвище Іваницька Т. А.

Література

1. Benson D.-J. Music : A Mathematical Offering / D.-J. Benson. – Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – 426 p.
2. Рагс Н. Ю. Строй / Н. Ю. Рагс // Большой энциклопедический словарь : Музыка / [гл. ред. Келдыш Г. В.]. – 2-е изд. – М. : Большая Российская энциклопедия, 1998. – С. 525.
3. Риман Г. Акустика с точки зрения музыкальной науки / Г. Риман ; пер. с нем. – М., 1898. – 147 с.
4. Немировский Л. Г. Акустика физическая, физиологическая и музыкальная / Л. Г. Немировский. – М. ; Петроград : Государственное издательство, 1923. – 216 с.
5. Шерман Н. Формирование равномерно-темперированного строя / Н. Шерман. – М. : Музыка, 1964. – 120 с.
6. Беляевский А. Г. Теория звука в приложении к музыке: основы физической и музыкальной акустики / А. Г. Беляевский. – М. ; Ленинград : Государственное издательство, 1925. – 238 с.
7. Музыкальная акустика / [В. А. Багадуров, Н. А. Гарбузов, П. Н. Зимин и др.] ; под ред. Н. А. Гарбузова. – М. : Государственное музыкальное издательство, 1954. – 237 с.
8. Schulter M. Pythagorean Tuning and Medieval Polyphony [Електронний ресурс] / M. Schalter. – Sacramento, 1998. – Режим доступу : <http://www.medieval.org/emfaq/harmony/pyth.html>.
9. Іваницький А. М., Євона Т. А. ⁴ Метод побудови шкал гармонічного музичного строю з квінтами та комами різної величини / А. М. Іваницький, Т. А. Євона. – О. : Одеська нац. акад. зв'язку, 2007. – 40 с. – Укр. – Деп. в ДНТБ України 16.04.07, № 25 – Ук 2007. – Реф. у : РЖ «Депоновані наукові роботи». – 2007. – № 1–2; в ВИНІТИ РАН «Депонированные научные работы». – 2007. – № 10. – Б/о 22.
10. Мальтер Л. Таблицы по инструментоведению / [авт.-сост. Л. Мальтер]. – М. : Советский композитор, 1972. – 135 с.

Таблиця № 1

Побудована гармонічна музична шкала від C_1 до c^5

Октава	Контр.			Велика		Мала		1-ша		2-а		3-тя		4-та	
f_1 , Гц		2			4		8		16		32		64		128
Звук	Гц	Гц	№ Гарм.	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц
C	32	32	16	64	64	128	128	256	256	512	512	1024	1024	2048	2048
C#	33,903	34	17	67,806	68	135,611	136	271,222	272	542,445	544	1084,890	1088	2169,780	2176
D	35,919	36	18	71,838	72	143,675	144	287,350	288	574,701	576	1149,401	1152	2298,802	2304
D#	38,055	38	19	76,109	76	152,218	152	304,437	304	608,874	608	1217,748	1216	2435,496	2432
E	40,317	40	20	80,635	80	161,270	160	322,540	320	645,080	640	1290,159	1280	2580,318	2560
F	42,715	42	21	85,430	84	170,859	168	341,719	336	683,438	672	1366,876	1344	2733,752	2688
F#	45,255	46	23	90,510	92	181,019	184	362,039	368	724,077	736	1448,155	1472	2896,309	2944
G	47,946	48	24	95,892	96	191,783	192	383,567	384	767,133	768	1534,266	1536	3068,533	3072
G#	50,797	50	25	101,594	100	203,187	200	406,375	400	812,749	800	1625,499	1600	3250,997	3200
A	53,817	54	27	107,635	108	215,269	216	430,539	432	861,078	864	1722,156	1728	3444,312	3456
A#	57,017	56	28	114,035	112	228,070	224	456,140	448	912,280	896	1824,561	1792	3649,121	3584
H	60,408	60	30	120,816	120	241,632	240	483,264	480	966,527	960	1933,055	1920	3866,109	3840
C	64	64	32	128	128	256	256	512	512	1024	1024	2048	2048	4096	4096

80

Таблиця № 2

Натуральні квінти і коми побудованої гармонічної шкали

f_1 , Гц	Інтервали											
	C-G	G-D	D-A	A-E	E-H	H-F# Cb-Gb	F#-Cb Gb-Db	C#-G# Db-Ab	Ab-Eb	Eb-B	B-F	F-C
2	1,5	1,5	1,5	1,4815	1,5	1,5333	1,4783	1,4706	1,52	1,4737	1,5	1,5238
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0114	1,0011	1,0234	1,0136	1,0188	1,0145	1,0167	1,0011	1,0170

Таблиця № 3

Порівняння гармонічних шкал з $f_1=16$ Гц між собою та з рівномірно-темперованою

Звук	Мерсен, Веркмейстер	Елліс		Карлос		Клонаріс		Іваницький, Іваницька	
	Гц	Гц	№ Гарм.	Гц	№ Гарм.	Гц	№ Гарм.	Гц	№ Гарм.
C	256	256	16	256	16	256	16	256	16
C#	271,222	272	17	272	17	272	17	272	17
D	287,350	288	18	288	18	288	18	288	18
D#	304,437	304	19	304	19	304	19	304	19
E	322,540	320	20	320	20	320	20	320	20
F	341,719	352	22	336	21	336	21	336	21
F#	362,039	384	24	352	22	352	22	368	23
G	383,567	400	25	384	24	384	24	384	24
G#	406,375	416	26	416	26	400	25	400	25
A	430,539	448	28	432	27	416	26	432	27
A#	456,140	464	29	448	28	448	28	448	28
H	483,264	480	30	480	30	480	30	480	30
C	512	512	32	512	32	512	32	512	32

81

Таблиця № 4

Порівняння натуральних квінт та ком гармонічних шкал

Шкали	І н т е р в а л и												
	C-G	G-D	D-A	A-E	E-H	H-F# Cb-Gb	F#-Cb Gb-D#	C#-G# Db-Ab	Ab-Eb	Eb-B	B-F	F-C	
Елліс	1,5625	1,44	1,5555	1,4286	1,5	1,6	1,4167	1,5294	1,4615	1,5263	1,5172	1,4545	<i>k</i>
	1,0428	1,0405	1,0382	1,0488	1,0011	1,0679	1,0576	1,0208	1,0252	1,0187	1,0126	1,0301	<i>c</i>
Карлос	1,5	1,5	1,5	1,4815	1,5	1,4667	1,5454	1,5294	1,4615	1,4737	1,5	1,5238	<i>k</i>
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0114	1,0011	1,0216	1,0315	1,0208	1,0252	1,0167	1,0011	1,0170	<i>c</i>
Клонаріс	1,5	1,5	1,4444	1,5385	1,5	1,4667	1,5454	1,4706	1,52	1,4737	1,5	1,5238	<i>k</i>
	1,0011	1,0011	1,0373	1,0268	1,0011	1,0216	1,0315	1,0188	1,0145	1,0167	1,0011	1,0170	<i>c</i>
Іваницький, Іваницька	1,5	1,5	1,5	1,4815	1,5	1,5333	1,4783	1,4706	1,52	1,4737	1,5	1,5238	<i>k</i>
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0114	1,0011	1,0234	1,0136	1,0188	1,0145	1,0167	1,0011	1,0170	<i>c</i>

82

Таблиця № 5

Порівняння середньоарифметичних величин натуральних квінт і ком гармонічних і рівномірно-темперованої шкал

Шкали	Середн. величина квінти	Співвідношення між рівном. р5 та н5 гарм. шкал	Середн. величина коми	Співвідношення між рівном. с та с _{ср} гарм. шкал
Мерсен, Веркмейстер (рівном.-темп.)	1,49831	1	1,00113	1
Елліс	1,45779	1,02779	1,03369	1,03253
Карлос	1,49850	1,00013	1,01247	1,01133
Клонаріс	1,49859	1,00019	1,01572	1,01458
Іваницький, Іваницька	1,49843	1,00008	1,01008	1,00894

Таблиця № 6

Друга гармонічна шкала із взаємопов'язаним f_i

f _i , Гц	2			1			2	1
Звук	Гц	Гц	№ Гарм. n	№ Гарм. n · 2	№ Гарм. n · 2 ± 1	Гц	Співвідношення з рівн.	Співвідношення з рівн.
C	32	32	16	32	32	32	1	1
C#	33,903	34	17	34	34	34	1,0029	1,0029
D	35,919	36	18	36	36	36	1,0023	1,0023
D#	38,055	38	19	38	38	38	1,0014	1,0014
E	40,317	40	20	40	40	40	1,0079	1,0079
F	42,715	42	21	42	42 + 1=43	43	1,0170	1,0067
F#	45,255	46	23	46	46 - 1=45	45	1,0165	1,0057
G	47,946	48	24	48	48	48	1,0011	1,0011
G#	50,797	50	25	50	50 + 1=51	51	1,0159	1,0040
A	53,817	54	27	54	54	54	1,0034	1,0034
A#	57,017	56	28	56	56 + 1=57	57	1,0182	1,0003
H	60,408	60	30	60	60	60	1,0068	1,0068
C	64	64	32	64	64	64	1	1

83

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

Таблиця № 7

Натуральні квінти та комби 1-ї та 2-ї гармонічних шкал із взаємопов'язаним f_1

		Інтервали											
f_1 , Гц		C-G	G-D	D-A	A-E	E-H	H-F \flat C \flat -G \flat	F \sharp -C \flat G \flat -D \flat	C \sharp -G \sharp D \flat -A \flat	A \flat -E \flat	E \flat -B	B-F	F-C
		2	1,5 1,0011	1,5 1,0011	1,5 1,0011	1,4815 1,0114	1,5 1,0011	1,5333 1,0234	1,4783 1,0136	1,4706 1,0188	1,52 1,0145	1,4737 1,0167	1,5 1,0011
1	1,5 1,0011	1,5 1,0011	1,5 1,0011	1,4815 1,0114	1,5 1,0011	1,5 1,0011	1,5111 1,0085	1,5 1,0011	1,4902 1,0054	1,5 1,0011	1,5088 1,0070	1,4834 1,0067	k c

Таблиця № 8

П'ята гармонічна шкала від C $_1$ до c 5 без відчутних ком

октава	Контр.	№ Гарм.	Велика		Мала		1-ша		2-га		3-тя		4-та	
			Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц
f_1 , Гц	0,125			0,25	0,5	1	2	4	8					
Звук	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц	Гц
C	32	256	64	64	128	128	256	256	512	512	1024	1024	2048	2048
C \sharp	33,903	271	67,806	67,75	135,611	135,5	271,222	271	542,445	542	1084,890	1084	2169,780	2168
D	35,919	287	71,838	71,75	143,675	143,5	287,350	287	574,701	576	1149,401	1152	2298,802	2304
D \sharp	38,055	304	76,109	76	152,218	152	304,437	304	608,874	608	1217,748	1216	2435,496	2432
E	40,317	322	80,635	80,5	161,270	161	322,540	322	645,080	644	1290,159	1288	2580,318	2576
F	42,715	342	85,430	85,5	170,859	171	341,719	342	683,438	684	1366,876	1368	2733,752	2736
F \sharp	45,255	362	90,510	90,5	181,019	181	362,039	362	724,077	724	1448,155	1448	2896,309	2896

АНАТОЛІЙ ІВАНИЦЬКИЙ, ТЕТЯНА ІВАНИЦЬКА. МЕТОД ПОБУДОВИ ШКАЛ...

G	47,946	48	384	95,892	96	191,783	192	383,567	384	767,133	768	1534,266	1536	3068,533	3072
G#	50,797	50,75	406	101,594	101,5	203,187	203	406,375	406	812,749	812	1625,499	1624	3250,997	3248
A	53,817	53,75	430	107,635	107,5	215,269	215	430,539	430	861,078	860	1722,156	1720	3444,312	3440
A#	57,017	57	456	114,035	114	228,070	228	456,140	456	912,280	912	1824,561	1824	3649,121	3648
H	60,408	60,375	483	120,816	120,75	241,632	241,5	483,264	483	966,527	966	1933,055	1932	3866,109	3864
C	64	64	512	128	128	256	256	512	512	1024	1024	2048	2048	4096	4096

Таблиця № 9

Натуральні квінти та коми від 1-ї до 5-ї гармонічних шкал із взаємопов'язаним f_1

f_1 , Гц	І н т е р в а л и															
	C-G	G-D	D-A	A-E	E-H	H-F# Cb-Gb	F#-Cb Gb-Db	C#-G# Db-Ab	Ab-Eb	Eb-B	B-F	F-C	k	c	k	c
2	1,5	1,5	1,5	1,4815	1,5	1,5333	1,4783	1,4706	1,52	1,4737	1,5	1,5238				
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0114	1,0011	1,0234	1,0136	1,0188	1,0145	1,0167	1,0011	1,0170				
3	1,5	1,5	1,5	1,4815	1,5	1,5	1,5111	1,5	1,4902	1,5	1,5088	1,4884	k	c	k	c
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0114	1,0011	1,0011	1,0085	1,0011	1,0054	1,0011	1,0070	1,0067				
0,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,494	1,504	1,494	1,5	1,490	1,5	1,491	1,506	k	c	k	c
	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011	1,0041	1,0027	1,0037	1,0011	1,0066	1,0011	1,0059	1,0039				
0,25	1,5	1,5	1,4930	1,4977	1,5031	1,4959	1,5028	1,4926	1,4975	1,5	1,5	1,4971	k	c	k	c
	1,0011	1,0011	1,0035	1,0004	1,0032	1,0016	1,0030	1,0038	1,0005	1,0011	1,0011	1,0008				
0,125	1,5	1,4948	1,4983	1,4977	1,5	1,4990	1,4972	1,4981	1,4975	1,5	1,5	1,4971	k	c	k	c
	1,0011	1,0024	1,0000	1,0004	1,0011	1,0004	1,0007	1,0001	1,0005	1,0011	1,0011	1,0008				

ТЕОРІЯ ТА МЕТОДОЛОГІЯ

11. *Поріцький О. В.* Фізика музики / О. В. Поріцький. – К. : Державне видавництво технічної літератури, 1961. – 80 с.

12. *Риман Г.* Музыкальный словарь / [авт.-сост. Г. Риман] ; пер. с нем. – М. : изд. Б. Юргенсона, 1896. – 1536 с.

13. *Алдошина И.* Музыкальная акустика : учебник [для студентов высших учебных заведений] / И. Алдошина, Р. Приттс. – С.Пб. : Композитор, 2006. – 720 с.

14. *Алдошина И.* Музыкальные шкалы и интервалы. Психоакустические основы их строения / И. Алдошина // Звукорежиссер. – 2003. – № 10. – С. 54–61.

15. *Гинкин Г. Г.* Справочник по радиотехнике / [авт.-сост. Г. Г. Гинкин]. – М. : Госэнергоиздат, 1948. – С. 336.

16. *Сапожков М.* Электроакустика : учебник [для студентов высших учебных заведений] / М. Сапожков. – М. : Связь, 1978. – 272 с.

17. *Гарбузов Н. А.* Зонная природа звуковысотного слуха // Н. А. Гарбузов – музыкант, исследователь, педагог : сборник статей / [сост. О. Сахалтуева, О. Соколова ; ред. Ю. Рагс] / Н. А. Гарбузов. – М. : Музыка, 1980. – С. 80–84.

18. *Мальцева Е. А.* Экспериментальное исследование по определению допустимой слухом расстройки интервалов / Е. А. Мальцева. – Рукопись. – Лаборатория муз. акустики при Московской консерватории, 1936.

19. *Benson D.-J.* Dave Benson's Music Links: zip file of scales information [Електронний ресурс] / [D.-J. Benson, J.-M. Chalmers, de Coul M. O.]. – 1995–2007. – Режим доступу : <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensonj/htm/music.html>.

Умовні позначення

$n5$ – натуральна квінта
 $c5$ – чиста квінта
 $p5$ – рівномірно-темперована квінта
 c – кома
 c_p – рівномірно-темперована кома
 c_{cp} – середньоарифметична величина коми
 C_1 – звук до контроктави
 C – звук до великої октави
 c^1 – звук до першої октави
 c^2 – звук до другої октави
 c^5 – звук до п'ятої октави
 d – диференціальний поріг відчуття різниці між двома сусідніми частотами
 f_1 – основна частота гармонічного музичного строю (перша гармоніка), показник рівня гармонічності
 f_k – частота k -го звука гармонічної музичної шкали
 k – інтервальний коефіцієнт
 k_{cp} – середньоарифметична величина інтервалу
 n – номер гармоніки гармонічної музичної шкали

В статті изложено разработанный авторами метод построения шкал гармонического музыкального строя с коммами разной величины. В результате действия этого метода построены 12-ступенные натуральные гармонические шкалы, в которых решена проблема осязанных комм и установлено определенное строение шкал.

Ключевые слова: равномерно темперированный строй, гармонический музыкальный строй, комма, показатель уровня гармоничности.